数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 1-14



# $E_6$ 型極大トーラス部分群と 3 次曲面

京大・理　松澤淳一
(Jun-ichi　Matsuzawa)

三次元複素射影空間 $\mathrm{P}^3(\mathbb{C})$ で定義された非特異 3 次曲面の moduli 空間と、その上にのる 3 次曲面の族を $E_6$ 型ルート系と Weyl 群および $E_6$ 型随伴群の極大トーラス部分群を用いて構成するという、成木勇夫氏との共同研究の報告をしたい。

3 次曲面と $E_6$ 型ルート系、Weyl 群との関係は古くからさまざまな角度から研究されてきた。たとえば、(1)3 次曲面上には 27 本の射影直線がのっているが、その交わり方を変えない置換群が $E_6$ 型 Weyl 群と同型である。(2) $S$ の中間ホモロジー $H_2(S,\mathbb{Z})$ において、標準因子のホモロジー類に直交する sublattice は交叉形式に関して $E_6$ 型 root lattice と同型になる。(3)$E_6$ 型単純特異点の普遍変形は $E_6$ 型リー環の Cartan 部分環を用いて記述されるが、この変形の非特異ファイバーのコンパクト化として 3 次曲面が得られる、などということがわかっている。このように 3 次曲面と $E_6$ 型リー環なりルート系、Weyl 群とは深い関係にある。一方、非特異 3 次曲面 (marking 付き) の moduli を $D_4$ 型随伴群の極大トーラス部分群と $D_4$ 型ルート系を用いて構成する事ができる ([3])。さらに [2] ではこの空間を複比の立場からとらえ直し、そのコンパクト化が構成されている。こうした背景から、[2] での手法をさらに $E_6$ 型ルート系に応用する事により、moduli の上にのる曲面の族をルート系や Weyl 群を用いて構成する事が期待される。実際それができるという事を以下説明したい。

## 1　3 次曲面とルート系

$S$ を $\mathrm{P}^3(\mathbb{C})$ で定義された非特異 3 次曲面とする。$S$ 上には 27 本の射影直線がのっている。これを $L_1,\ldots,L_{27}$ としよう。これらは第一種例外曲線の集合と一致している。

$$\mathcal{L}_S=\{L_1,\ldots,L_{27}\}$$

**例 1**(Clebsch の diagonal surface)

$$S = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathrm{P}^4 \mid \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = \sum_{i=0}^{4} x_i = 0\}$$

$S$ 上には $x_i + x_j = 0, x_k + x_l = 0\,(i,j,k,l:\mathrm{distinct})$ で定義される直線が 15 本、$x_i + x_j + \alpha x_k = 0, x_l + x_m + (1-\alpha)x_n = 0\,(i,j,k:\ \mathrm{distinct}, l,m,n:\mathrm{distinct}, \#(\{i,j,k\} \cap \{l,m,n\}) = 1, \alpha^2 - \alpha - 1 = 0)$ で定義される直線が 12 本ある。

$S$ の 2 次元ホモロジー群を考える。

$$H_2(S,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 7}$$

標準因子の類を $k_S$ とすると次が成り立つ。

**命題 1** (see e.g. [1])　$S$ を非特異 3 次曲面とする。

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{Z}} &:= k_S^{\perp} = \{v \in H_2(S,\mathbb{Z}) | (v, k_S) = 0\}, \\ V &:= V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \\ R_S &:= \{\alpha \in V_{\mathbb{Z}} | (\alpha,\alpha) = -2\} \subset V, \text{ここで} (\ ,\ ) \text{は交叉形式} \end{aligned}$$

とすると、

(i) $(V, R_S)$ は交叉形式に関して $E_6$ 型ルート系となる。(ただし内積は negative definite)

(ii) $R_S = \{[L_i] - [L_j] | L_i, L_j \in \mathcal{L}_S, 1 \le i,j \le 27, i \ne j, L_i \cap L_j = \emptyset\}$ 、$[L_i]$ は $S$ 上の直線 $L_i$ のホモロジー類。

(iii) $W_R = \{g \in \mathrm{Aut}(H_2(S,\mathbb{Z})) | g$ は内積 $(\ ,\ )$ を保ち $k_S$ を固定$\}$ とすると、$W_R$ は $E_6$ 型 Weyl 群に同型になる。

ランク 7 の lattice

$$U_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_6$$

に双一次形式が $(l,l) = 1, (l,e_i) = 0, (e_i,e_i) = -1, (e_i,e_j) = 0, (1 \le i,j \le 6, i \ne j.)$ のように入っているとする。$k = -3l + e_1 + \cdots + e_6$ とし

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{Z}} &:= \{u \in U_{\mathbb{Z}} | (u,k) = 0\}, \\ V &:= V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \\ R(E_6) &:= \{\alpha \in V_{\mathbb{Z}} | (\alpha,\alpha) = -2\} \end{aligned}$$

とすると $R(E_6)$ は $V$ における $E_6$ 型ルート系となる。また

$$\mathcal{L} := \{v \in V_{\mathbb{Z}} | (v,v) = (v,k) = -1\}$$

とすると

$$\mathcal{L} = \{e_i, l - e_i - e_j (i \neq j), 2l - \sum_{n=1}^{6} e_n + e_i | 1 \leq i,j \leq 6\}$$

となり $\mathcal{L}$ は 27 個の元からなる集合になる。

$$f_{ij} = l - e_i - e_j, \quad g_i = 2l - \sum_{n=1}^{6} e_n + e_i$$

とおく。

**定義** $S$ 上の 27 本の直線の集合 $\mathcal{L}_S$ に対して、$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}_S$ への写像

$$m : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_S = \{L_1, \dots L_{27}\}$$

であって、$\#\{L_i \cap L_j\} = (m^{-1}(L_i), m^{-1}(L_j))$ となるものがある。これを $S$ の **marking** とよぶ。また命題 1(ii) より marking $m$ は $R(E_6)$ から $R_S$ への isometry をひきおこす。これを $\tilde{m}$ と書くことにする。$S$ と $m$ のペア $(S,m)$ を marking 付 3 次曲面と呼ぶ。

**定義** marking 付 3 次曲面 $(S,m), (S',m')$ が同型であるとは、同型 $\Phi : S \simeq S'$ であって、$\Phi$ が引き起こす写像 $\Phi_* : \mathcal{L}_S \to \mathcal{L}_{S'}$ が $\Phi_* \circ m = m'$ をみたすときをいう。

## 2　周期写像とルート系

$S$ を非特異 3 次曲面、$m$ を marking とする。$S$ 上の点 $p$ における接平面を $T_p$ とする。$T_p \cap S$ は 3 次曲線となる。

**補題 2** $C_p = T_p \cap S$ とする。$S$ を定義する 3 次式を $F(x)$、$F$ の Hessian を $\mathrm{Hess}(F)$ とし、 $\mathrm{Hess}(F) = 0$ で定義される $S$ 上の曲線 (12 次曲線) を $H$ とする。$H$ を parabolic curve という。$S^* := S \setminus (H \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{27}), (L_i \in \mathcal{L}_S)$ としたとき、

(i) $p \in S^* \Rightarrow C_p$ は node をもつ 3 次曲線。

(ii) $p \in L_i \Rightarrow C_p = \mathrm{conic} \cup \mathrm{line}$

(iii) $p \in H \Rightarrow C_p$ は cusp をもつ 3 次曲線。

となる。

$D$ を $S$ 上の楕円曲線とする。$S$ 上の line bundle を $D$ に制限する事により、準同型

$$\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(D)$$

を得る。ここで、$\mathrm{Pic}(X)$ は $X$ の Picard 群 (line bundle の同値類のなす群)。この準同型を $S$ の canonical line bundle $K_S$ の直交補空間に制限した写像の像は $\mathrm{Pic}^0(D)$ (degree が 0 の因子の類) に入る。

$$(\mathrm{Pic}(S))^{\perp K_S} \to \mathrm{Pic}^0(D)$$

$D$ が node を持つとき、$D$ の orientation をきめれば同型

$$\mathrm{Pic}^0(D \setminus \{node\}) \simeq \mathbb{C}^*$$

は定数倍をのぞいてきまるが、$S$ が非特異ならばこの同型を通じて

$$(\mathrm{Pic}(S))^{\perp K_S} \to \mathbb{C}^*$$

は同型 $\mathrm{Pic}^0(D \setminus \{node\}) \simeq \mathbb{C}^*$ の取り方によらずきまる。いま $\mathrm{Pic}(S) \simeq H_2(S,\mathbb{Z})$ であるから命題 1 より $(\mathrm{Pic}(S))^{\perp K_S}$ は $E_6$ 型 root lattice $\mathbb{Z}R_S$ に同型である (命題 1)。marking $\tilde{m} : R(E_6) \simeq R_S$ により、結局 $(S, D, m)$ に対して、$E_6$ 型 root lattice $\mathbb{Z}R(E_6)$ から $\mathbb{C}^*$ への写像

$$\varphi_{(S,D,m)} : R(E_6) \to \mathbb{C}^*$$

ができた。こうして得られた周期写像

$$(S, D, m) \longmapsto \varphi_{(S,D,m)} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}R(E_6), \mathbb{C}^*)$$

を $S$ 上の直線を使って書いてみよう。

$p \in S^*$ とする。ルート $\alpha \in R(E_6)$ に対し、$R_S \ni \tilde{m}(\alpha)$ を略して $\alpha$ と書くことにする。命題 1 より、ルート $\alpha$ に対して、$S$ 上の直線 $L_i, L_j$ であって、

$$\alpha = [L_i] - [L_j], \quad L_i \cap L_j = \emptyset$$

となるものが存在する。また、$S$ 上の任意の直線と $C_p$ は一点で交わる。

$T_p$ において $p$ を通る直線は $\mathrm{P}^1$ でパラメトライズされる．$p$ における $C_p$ の接線は $p$ が node だから 2 本あるがこれを $l, l'$ とする．いま $p_i = L_i \cap C_p$ $(i = 1, 2)$ とし，$p$ と $p_i$ を通る直線を $l_i$ とするとき，複比の組 $\{[l, l'; l_i, l_j], [l', l; l_i, l_j]\}$ を考える。$C_p$ の

orientation $\epsilon$ を決めれば，このどちらかの値を指定できるので，その値を $\chi_p^\epsilon(\alpha)$ と書くことにする．

$$\chi_p^\epsilon(\alpha) = [l, l'; l_i, l_j] \text{ or } [l', l; l_i, l_j]$$
$$\chi_p^{-\epsilon}(\alpha) = (\chi_p^\epsilon(\alpha))^{-1}$$

$\chi_p^\epsilon$ は root lattice $\mathbb{Z}R(E_6)$ から $\mathbb{C}^*$ への準同型をあたえる．これが上でもとめた写像 $\varphi_{(S,C_p,m)}$ である。したがって $\chi_p^\epsilon(\alpha)$ はルート $\alpha$ に対する $S$ 上の直線 $L_i, L_j$ の選び方によらず、$p, m, \alpha$ のみによって決まる。

$$T(E_6) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}R(E_6), \mathbb{C}^*)$$

だから $\chi_p^\epsilon$ は $E_6$ 型の随伴群の極大トーラス部分群 $T(E_6)$ の元を定める．いま involution

$$\iota : T(E_6) \to T(E_6)$$

を $\iota(t) = t^{-1}$ とする．$T(E_6) \to T(E_6)/<\iota>$ による $\chi_p^\epsilon$ の image は orientation によらないので $\chi_p$ と書くことにする．点 $p \in S^*$ に対して $\chi_p \in T(E_6)/<\iota>$ を対応させることにより写像

$$\tau : S^* \to T(E_6)/<\iota>$$

を得る．このとき

**命題 3** 写像

$$\tau : S^* \to (T(E_6) \setminus \Delta)/<\iota>$$

は単射．ここで，$\Delta := \{t \in T(E_6) | \alpha(t) = 1 \text{ for some } \alpha \in R(E_6)\}$. さらに

$$\bigcup_{[(S,m)] \in \mathfrak{M}} \tau(S^*) = (T(E_6) \setminus \Delta)/<\iota>$$

ここで $\mathfrak{M} = \{$ marking 付非特異 3 次曲面の同型類$\}$

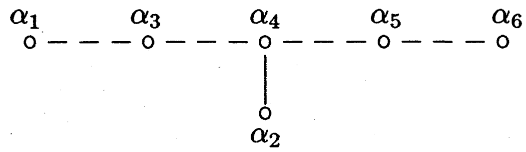
## 3 $E_6$ 型ルート系の部分ルート系から決まる複比

前節最後の命題を使って marking 付非特異 3 次曲面の族と moduli をルート系の言葉で記述するために次のように，ルート系に対応した $T(E_6)/<\iota>$ 上の有理関数を考える．

$R(D_4)$ を $D_4$ 型ルート系とする．$R^+(D_4)$ を正ルートの集合とする．$R^+(D_4)$ は 12 個の元からなる集合で，次のように 3 つの部分集合に分けられる．

$$\begin{cases} R^+(D_4) = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3, \quad |R_i| = 4, \\ \alpha, \beta \in R_i, \alpha \neq \beta \Rightarrow (\alpha, \beta) = 0, \\ \alpha \in R_i, \beta \in R_j, i \neq j \Rightarrow (\alpha, \beta) \neq 0, \\ \sum_{\alpha \in R_1} \alpha = \sum_{\beta \in R_2} \beta. \end{cases}$$

たとえば，$R(E_6) \supset R(D_4)$ を $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ で生成される部分ルート系とする．




$$R_1 = \{\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$$

$$R_2 = \{\alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$$

$$R_3 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5\}$$

この分解に付随して次のような関数を考える．

$$r = \prod_{\gamma \in R_1, \gamma' \in R_2} \frac{e^{\gamma} - 1}{e^{\gamma'} - 1}$$

（ここで，$e^{\gamma}$ はルート $\gamma$ を $T$ 上の関数と見なしたときの記号）．いま

$$\begin{aligned} 1 - r &= -e^{\alpha_2} \prod_{\gamma \in R_3, \gamma' \in R_2} \frac{e^{\gamma} - 1}{e^{\gamma'} - 1} \\ &= \frac{(e^{-\alpha_2} - 1)(e^{-\alpha_3} - 1)(e^{-\alpha_5} - 1)(e^{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5} - 1)}{(e^{\alpha_3 + \alpha_4} - 1)(e^{\alpha_4 + \alpha_5} - 1)(e^{\alpha_2 + \alpha_4} - 1)(e^{-\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5} - 1)} \end{aligned}$$

となり，分子の因子は $R_3$ の元に符号 $\pm 1$ を掛けたものになっている．これを

$$1 - r = \prod_{1 \leq i \leq 4} \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma_i'} - 1}$$

と書くと

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq 4} \gamma_i = \sum_{1 \leq i \leq 4} \gamma_i' \\ (\gamma_i, \gamma_j) = (\gamma_i', \gamma_j') = 0 \ (i \neq j), \\ (\gamma_i, \gamma_j') \neq 0. \end{cases}$$

をみたす．

**補題 4**

(i) $R_D \subset R(E_6)$ を $D_4$ 型部分ルート系とする。

$$S(R_D) = \{(\{\gamma_i\}, \{\gamma'_i\}) | \gamma_i, \gamma'_i \in R_D\ (1 \le i \le 4) \text{は} (1) \text{をみたす。}\}$$

$$cr(S(R_D)) = \{\prod_{i=1}^{4} \frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma'_i}-1} | (\{\gamma_i\}, \{\gamma'_i\}) \in S(R_D)\}$$

とする。$\sum \gamma_i = \sum \gamma'_i$ だから $cr(S(R_D))$ の元は $T(E_6)/\iota$ 上の有理関数となる。また $\forall(\{\gamma_i\}, \{\gamma'_i\}) \in S(R_D)$ に対して $r = \prod_{i=1}^{4} \frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma'_i}-1}$ とおくと、

$$cr(S(R_D)) = \{r^{\pm 1}, (1-r)^{\pm 1}, (1-1/r)^{\pm 1}\}$$

となる。

(ii) $\gamma_i, \gamma'_i \in R(E_6)$ が (1) をみたすとする。$r = \prod_{i=1}^{4} \frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma'_i}-1}$ とすると、ある $D_4$ 型部分ルート系 $R_D$ があって、$r \in cr(S(R_D))$ となる。

**定義** $D_4$ 型部分ルート系 $R_D$ に対して決まる $cr(S(R_D))$ の元 $r$ を $D_4$ 型 cross ratio とよぶ。集合

$$\{r^{\pm 1}, (1-r)^{\pm 1}, (1-1/r)^{\pm 1}\}$$

を $r$ の属する $D_4$ 型 cross ratio system とよぶ。

上の補題から次の一対一対応があることがわかる。

$$\{R(E_6) \text{ の } D_4 \text{ 型部分ルート系}\} \xleftrightarrow{1:1} \{D_4 \text{ 型 cross ratio systems}\}$$

以上、$E_6$ 型ルート系 $R(E_6)$ の $D_4$ 型部分ルート系に対して $T(E_6)/ < \iota >$ 上の有理関数を考えたが、次に $A_3$ 型部分ルート系に対して、複比の性質をもった有理関数を考える。

$R_A$ を $A_3$ 型部分ルート系とする。例えば $R_A \subset R(E_6)$ を $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ で生成されるものとする。

$$r = \frac{(e^{\alpha_4}-1)(e^{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}-1)}{(e^{\alpha_3+\alpha_4}-1)(e^{\alpha_4+\alpha_5}-1)}$$

とすると

$$1-r = \frac{(e^{-\alpha_3}-1)(e^{\alpha_5}-1)}{(e^{-\alpha_3-\alpha_4}-1)(e^{\alpha_4+\alpha_5}-1)}$$

ここで分子に現れるルートを $\{\gamma_1, \gamma_2\}$、分母に現れるルートを $\{\gamma_1', \gamma_2'\}$ とすると、

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_{1\leq i\leq 2} \gamma_i = \sum_{1\leq i\leq 2} \gamma_i' \\ (\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_1', \gamma_2') = 0, \\ (\gamma_i, \gamma_j') \neq 0. \end{cases}$$

が成り立つ。

**補題 5**

(i) $R_A \subset R(E_6)$ を $A_3$ 型部分ルート系とする。

$$S(R_A) = \{(\{\gamma_i\}, \{\gamma_i'\}) | \gamma_i, \gamma_i' \in R_A \ (1 \leq i \leq 2) \text{は (2) をみたす。}\}$$

$$cr(S(R_A)) = \{\prod_{i=1}^{2} \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma_i'} - 1} | (\{\gamma_i\}, \{\gamma_i'\}) \in S(R_A)\}$$

とする。$\sum \gamma_i = \sum \gamma_i'$ だから $cr(S(R_A))$ の元は $T(E_6)/\iota$ 上の有理関数となる。また $\forall(\{\gamma_i\}, \{\gamma_i'\}) \in S(R_A)$ に対して $r = \prod_{i=1}^{2} \frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma_i'}-1}$ とおくと、

$$cr(S(R_A)) = \{r^{\pm 1}, (1-r)^{\pm 1}, (1-1/r)^{\pm 1}\}$$

となる。

(ii) $\gamma_i, \gamma_i' \in R(E_6)$ が (2) をみたすとする。$r = \prod_{i=1}^{2} \frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma_i'}-1}$ とすると、ある $A_3$ 型部分ルート系 $R_A$ があって、$r \in cr(S(R_A))$ となる。

**定義** $A_3$ 型部分ルート系 $R_A$ に対して決まる $cr(S(R_A))$ の元 $r$ を $A_3$ 型 cross ratio とよぶ。また集合 $\{r^{\pm 1}, (1-r)^{\pm 1}, (1-1/r)^{\pm 1}\}$ を $r$ の属する $A_3$ 型 crossratio system とよぶ。

上の補題から次の一対一対応があることがわかる。

$$\{R(E_6) \text{ の } A_3 \text{ 型部分ルート系}\} \xleftrightarrow{1:1} \{A_3 \text{ 型 cross ratio systems }\}$$

そこで、全ての $D_4$ 型部分ルート系および $A_3$ 型部分ルート系に対してこのような有理関数を考えることにする。

**定義**

$$CR(D_4) := \{\prod_{i=1}^{4} \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma_i'} - 1} | \gamma_i, \gamma_i' \in R(E_6) \ (1 \leq i \leq 4), (\{\gamma_i\}, \{\gamma_i'\}) \text{は (1) をみたす。}\}$$

$$CR(A_3) := \{\prod_{i=1}^{2} \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma_i'} - 1} | \gamma_i, \gamma_i' \in R(E_6) \ (1 \leq i \leq 2), (\{\gamma_i\}, \{\gamma_i'\}) \text{は (2) をみたす。}\}$$

## 4 $A_3, D_4$ 型 cross ratio の幾何学的な意味

$(S, m)$ を marking 付非特異 3 次曲面とする．前節で定義した有理関数を使って $S$ 上の有理関数であって複比の性質を持った関数を次のように定義する．$p \in S^* = S \setminus (H \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{27})$, ($H$ :parabolic curve, $L_i$ : $S$ 上の直線), $r \in CR(D_4)$ or $CR(A_3)$ とする．命題 3 の写像 $\tau$ を通じて $S$ 上の有理関数 $r^S$ を

$$r^S(p) = r(\tau(p))$$

で定義する．$W(E_6)$ の $CR(D_4), CR(A_3)$ への作用を次で定義する．

$$r = \prod \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma'_i} - 1},$$

$$w(r) = \prod \frac{e^{w(\gamma_i)} - 1}{e^{w(\gamma'_i)} - 1}, \quad w \in W(E_6)$$

$R(E_6)$ における 2 つの $D_4$ 型部分ルート系は $W(E_6)$ の元でうつりあう．また $A_3$ 型部分ルート系についてもそうである。さらに 1 つの cross ratio system の 6 個の元は互いに $W(E_6)$ の作用でうつりあうので、

**命題 6** $W(E_6)$ は $CR(D_4), CR(A_3)$ に可移に作用する．

$r^S$ の zero locus と pole locus を調べるために次のような関数を考える．$\gamma \in R(E_6)$ に対して

$$f_\gamma = \frac{(e^\gamma - 1)^2}{e^\gamma}$$

とする．$f_\gamma$ は $T(E_6)/\iota$ 上の有理関数である．$f_\gamma^S$ を $S$ 上のルート関数と呼ぼう。

$$r = \prod \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma'_i} - 1},$$

を $D_4$ または $A_3$ 型 cross ratio とすると，$\sum \gamma_i = \sum \gamma'_i$ だから

$$r^2 = \prod \frac{f_{\gamma_i}}{f_{\gamma'_i}}$$

となる．$f_\gamma^S$ の zero と pole を調べる．

**定義** $\gamma \in R(E_6)$ とする．命題 1 より，$H_2(S, \mathbb{Z})$ において $m(\gamma) = [L] - [L']$ となる $S$ 上の直線 $L, L'$ があるが，このような直線の組は全部で 6 組ある．これらの組

$\{(L,L')|1\le i\le 6\}$ を，ルート $\gamma$ に対して決まる double six という．略して

$$D(\gamma)=\begin{pmatrix}L_1\dots L_6\\ L_1'\dots L_6'\end{pmatrix}$$

と書く．このとき、この研究の出発点となったつぎの重要な定理が成り立つ。

**定理 7** $\gamma$ に対して決まる double six を $\{(L_i,L_i')\}$ とすると、 $f_\gamma^S$ の zero locus は $S$ 上の parabolic curve $H$, pole locus は $\cup_{i=1}^6(L_i\cup L_i')$ となる。

さて $r$ を $D_4$ 型 cross ratio とする。

$$(r^2)^S=\prod_{i=1}^4\frac{(f_{\gamma_i})^S}{(f_{\gamma_i'})^S}$$

このとき各 $f_\gamma^S$ の zero と pole はキャンセルされて $(R^2)^S$ は定数となる事がわかる。たとえば marking $m$ を

$$E_i=m(e_i),\ F_{ij}=m(l-e_i-e_j),\ G_i=m(2l-\sum_{n=1}^6 e_n+e_i)$$

とし、

$$\alpha_1=e_1-e_2,\ \alpha_2=l-e_1-e_2-e_3,\ \alpha_3=e_2-e_3,$$

$$\alpha_4=e_3-e_4,\ \alpha_5=e_4-e_5,\ \alpha_6=e_5-e_6$$

とする。

$$\begin{aligned}r&=\frac{(e^{\alpha_4}-1)(e^{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}-1)(e^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5}-1)(e^{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}-1)}{(e^{\alpha_3+\alpha_4}-1)(e^{\alpha_4+\alpha_5}-1)(e^{\alpha_2+\alpha_4}-1)(e^{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}-1)}\\&=\prod\frac{e^{\gamma_i}-1}{e^{\gamma_i'}-1}\end{aligned}$$

のとき Double six は

$$\begin{aligned}D(\alpha_4)&=\begin{pmatrix}E_3G_3F_{14}F_{24}F_{45}F_{46}\\E_4G_4F_{13}F_{23}F_{35}F_{36}\end{pmatrix},D(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\begin{pmatrix}F_{34}F_{14}F_{13}G_2G_5G_6\\E_1E_3E_4F_{56}F_{26}F_{25}\end{pmatrix}\\
D(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)&=\begin{pmatrix}F_{25}F_{15}F_{12}G_3G_4G_6\\E_1E_2E_5F_{46}F_{36}F_{34}\end{pmatrix},D(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)=\begin{pmatrix}E_2G_2F_{15}F_{35}F_{45}F_{56}\\E_5G_5F_{12}F_{23}F_{24}F_{26}\end{pmatrix}\\
D(\alpha_3+\alpha_4)&=\begin{pmatrix}E_2G_2F_{14}F_{34}F_{45}F_{46}\\E_4G_4F_{12}F_{23}F_{25}F_{26}\end{pmatrix},D(\alpha_4+\alpha_5)=\begin{pmatrix}E_3G_3F_{15}F_{25}F_{45}F_{56}\\E_5G_5F_{13}F_{23}F_{34}F_{36}\end{pmatrix}\\
D(\alpha_2+\alpha_4)&=\begin{pmatrix}F_{24}F_{14}F_{12}G_3G_5G_6\\E_1E_2E_4F_{56}F_{36}F_{35}\end{pmatrix},D(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)=\begin{pmatrix}F_{35}F_{15}F_{13}G_2G_4G_6\\E_1E_3E_5F_{46}F_{26}F_{24}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、$(r^2)^S$ の pole は $4H+D(\alpha_4)+D(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+D(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)+D(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$、zero は $4H+D(\alpha_3+\alpha_4)+D(\alpha_4+\alpha_5)+D(\alpha_2+\alpha_4)+D(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$ となる ($\gamma$ に対する double six の直線の和を $D(\gamma)$ と略記した)。ところで、

$$\bigcup_{\gamma_i} D(\gamma_i)=\bigcup_{\gamma_i'} D(\gamma_i')$$

だから zero と pole はキャンセルされて $(r^2)^S$ は定数となる。他の $D_4$ 型 cross ratio は $r$ に $W(E_6)$ の元を作用させて得られるので同様に $S$ 上定数となる。従って、

**定理 8** $(S,m)$ を marking 付非特異 3 次曲面とし、$r$ を $D_4$ 型 cross ratio とすると $r^S$ は定数となる。

この定理により、marking 付非特異 3 次曲面の moduli が $D_4$ 型 cross ratio を使って記述できることがわかる。

次に $A_3$ 型 cross ratio を考える。例えば

$$r=\frac{(e^{\alpha_4}-1)(e^{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}-1)}{(e^{\alpha_3+\alpha_4}-1)(e^{\alpha_4+\alpha_5}-1)}$$

とすると $D_4$ 型 cross ratio のときと同様に考えて、$(r^2)^S$ の zero locus は $2(F_{25}+F_{34})$、pole locus は $2(F_{24}+F_{35})$ となる。また、

$$1-r=\frac{(e^{-\alpha_3}-1)(e^{\alpha_5}-1)}{(e^{-\alpha_3-\alpha_4}-1)(e^{\alpha_4+\alpha_5}-1)}$$

だから、$((1-r)^2)^S$ の zero locus は $2(F_{23}+F_{45})$、pole locus は $2(F_{24}+F_{35})$ となる。すなわち

$$(r^2)^S=\left(\frac{F_{25}F_{34}}{F_{24}F_{35}}\right)^2,\quad ((1-r)^2)^S=\left(\frac{F_{23}F_{45}}{F_{24}F_{35}}\right)^2$$

ここで直線 $F_{ij}$ の定義式を同じ記号で $F_{ij}$ と書いた。いま $S$ の tritangent (互いに交わる 3 本の直線の和) を

$$T_1=F_{25}\cup F_{34}\cup F_{16},\quad T_2=F_{24}\cup F_{35}\cup F_{16},\quad T_3=F_{23}\cup F_{45}\cup F_{16}$$

とすると、$r^S$ は $T_1\setminus F_{16}$ 上で 0、$T_2\setminus F_{16}$ 上で $\infty$、$T_3\setminus F_{16}$ 上で 1 の値をとる有理関数となる。$T_1\cap T_2\cap T_3=F_{16}$ である。$F_{16}$ を通る平面 $P$ 全体は $\mathrm{P}^1$ でパラメトライズされる。

$$\varphi:\left\{P\,\middle|\,P\supset F_{16}\right\}\to \mathrm{P}^1$$

$T_i$ をふくむ平面 $P_i$ に対して、$\varphi(P_i)$ が、それぞれ 0、$\infty$、1 となるように $\varphi$ をとっておく。$\varphi|_S:S\to\mathrm{P}^1$ を $(S\cap P)\setminus F_{16}$ 上の点に $\varphi(P)$ を対応させるように決め

ると、$\varphi|_S$ は $r^S$ に一致する。従って $A_3$ 型 cross ratio は、$S$ 上の直線を通る平面で $S$ を切ることによって、$S$ 上の点に $\mathrm{P}^1$ の点を対応させる関数である。

**命題 9** $r$ を $A_3$ 型 cross ratio とする。$S$ の直線 $L$、tritangents $T_1, T_2, T_3$ と、

$$\varphi : \left\{P : \text{平面} \;\middle|\; P \supset L\right\} \to \mathrm{P}^1$$
$$\varphi(T_1 \setminus L) = 0, \quad \varphi(T_2 \setminus L) = \infty \quad \varphi(T_3 \setminus L) = 1$$

であって、

$$r^S = \varphi|_S$$

となるものがある。

## 5 複比写像

cross ratio のつくる、乗法群について少しふれておく。

$$\Gamma(D_4) = \langle r \mid r \in CR(D_4)\rangle, \quad \Gamma(A_3) = \langle r \mid r \in CR(A_3)\rangle$$

をそれぞれ $D_4$ 型 cross ratio、$A_3$ 型 cross ratio のつくる乗法群とする。

**命題 10**

(i) $\Gamma(D_4) \subset \Gamma(A_3)$

(ii) $\Gamma(A_3)$ の元の間の関係式は $r_1 r_2 = r_3$ という形で書ける関係式と、

$$\left\{r^{\pm1},\ (1-r)^{\pm1},\ (1-1/r)^{\pm1}\right\}$$

の間の関係式で書ける。

(iii)

$$\mathbb{C}(T(E_6))^{<\iota>} \simeq \mathbb{C}(\Gamma(A_3)) \quad (\mathbb{C}[\Gamma(A_3)] \text{ の商体})$$

ここで $\mathbb{C}(T(E_6)) = \mathbb{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ ($\alpha_i$ : 基本ルート) としたとき $\iota$ は $\iota(\alpha_i) = \alpha_i^{-1}$ で定義される involution。このことから、$T(E_6)/\iota$ と $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\Gamma(A_3)])$ は双有理同値であることがわかる。ここで、$\mathbb{C}[\Gamma(A_3)]$ は $CR(A_3)$ で生成される $\mathbb{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ の $\mathbb{C}$ subalgebra。

$r$ を $A_3$ 型 または $D_4$ 型 cross ratio とすると、$r^S$ は $S$ から $\mathrm{P}^1$ への写像となる。

$$r^S : S \to \mathrm{P}^1$$

このとき、

**定理 11**

$$\phi_S : S \to (\mathrm{P}^1)^{N_A} \times (\mathrm{P}^1)^{N_D}$$

を $\phi_S(x) = (r_i^S(x)) \times ((r_j')^S(x))$, $r_i \in CR(A_3)$, $r_j' \in CR(D_4)$, $N_A = |CR(A_3)|$, $N_D = |CR(D_4)|$ で定義すると、$\phi_S$ は embedding となる。

写像

$$\bigcup_{[(S,m)] \in \mathfrak{M}} S \to (\mathrm{P}^1)^{N_A} \times (\mathrm{P}^1)^{N_D}$$

を複比写像と呼ぶことにする。ここで $\mathfrak{M} = \{$ marking 付非特異 3 次曲面の同型類$\}$

$$\Phi : X = (T(E_6) \setminus \Delta)/\iota \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^{N_A} \times (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^{N_D} \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} (\mathrm{P}^1)^{N_A} \times (\mathrm{P}^1)^{N_D}$$

$$\varphi_1(t) = (r_A^i(t)) \times (r_D^j(t)), \quad r_A^i \in CR(A_3),\ r_D^j \in CR(D_4)$$

$\varphi_2$ は inclusion 、 $\Delta$ は鏡映の固定点集合、 $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ とする。また

$$\pi : (\mathrm{P}^1)^{N_A} \times (\mathrm{P}^1)^{N_D} \to (\mathrm{P}^1)^{N_D}$$

を projection とする。

**命題 12**

$$S \simeq \overline{\Phi \circ \tau(S^*)}$$

右辺は $(\mathrm{P}^1)^{N_A} \times (\mathrm{P}^1)^{N_D}$ での閉包。

$M = \pi \circ \Phi(X)$ とすると、つぎの定理が成り立つ。

**定理 13**

(i)

$$M = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\Gamma(D_4)])$$

であってこれは marking 付非特異 3 次曲面の moduli となる。ただしここで $\mathbb{C}[\Gamma(D_4)]$ は $CR(D_4)$ で生成される $\mathbb{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ の $\mathbb{C}$ subalgebra。

(ii)

$$\mathfrak{X} = \overline{\Phi(X)} \cap \pi^{-1}(M)$$

とすると、$\mathfrak{X}$ は非特異な多様体となり、射影 $\pi : \mathfrak{X} \to M$ は proper flat morphism で $\pi^{-1}(x)$, $(x \in M)$ は非特異 3 次曲面となる。さらに構成のしかたから Weyl 群 $W(E_6)$ は $\mathfrak{X}$, $M$ に equivariant に作用する。

## 注

(i) $M$ は次のような多様体と同型である。$T(D_4)$ を $D_4$ 型の随伴群の極大トーラスとする。$T(D_4)$ を単位元で blow up する。

$$\varphi : \tilde{T} \to T(D_4)$$

$\tilde{T}$ から $T(D_4)$ の鏡映面の proper transform をぬいた多様体を $\Sigma$ とする。

$$\Sigma = \tilde{T} \setminus \cup_{\alpha \in R(D_4)} H'_\alpha$$

$$H_\alpha = \{t \in T(D_4) | \alpha(t) = 1\}$$

$$H'_\alpha = \overline{\varphi^{-1}(H_\alpha \setminus \{1\})}$$

このとき

$$M \simeq \Sigma$$

(ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathrm{P}^2$ の 7 点 (順序付き) の moduli、$M$ は 6 点 (順序付き) の moduli となっている。

以上 marking 付非特異 3 次曲面の moduli と total space を群論的に構成したが、現在 $\mathfrak{X}$ のコンパクト化がどのような構造をもっているか研究中である。これについては別の機会にゆずりたい。

## 参考文献


[1] Yu. I. Manin,*Cubic Forms*, 2nd edition, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[2] I. Naruki, *Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces*,Proc. London Math. Soc. (3), **45** (1982), pp. 1–30.

[3] I. Naruki and J. Sekiguchi, *A modification of Cayley's family of cubic surfaces and birational action of* $W(E_6)$ *over it*, Proc. Japan Acad.,**56** (1980), pp. 122–125.